

Análisis de las estrategias de cobertura basadas en un modelo de regresión cuantílica multiescala

Raúl de Jesús Gutiérrez¹   - Universidad Autónoma del Estado de México, México

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo combinar la teoría de ondoletas y el método de regresión cuantílica para estimar las razones de cobertura cuantílica multiescala (RCCM) y examinar la efectividad de las coberturas en diferentes escalas de tiempo para los portafolios de los índices accionarios Bovespa y S&P/BMV IPC. Los resultados revelan que las RCCM y la efectividad de las coberturas se incrementan en los horizontes de cobertura más largos. Bajo los criterios de reducción de varianza y VaR, los resultados indican que el desempeño del modelo de RC multiescala tiene ventajas comparativas sobre el modelo de MCO multiescala para mejorar la calidad de las coberturas dentro y fuera de la muestra, particularmente para los futuros del índice accionario S&P/BMV IPC. Asimismo, el modelo de RC multiescala tiene mejores propiedades predictivas para reducir el riesgo base y el exceso de riesgo residual de cola para el portafolio de cobertura. Los hallazgos tienen implicaciones para la asignación eficiente de capital de los inversionistas adversos al riesgo y la regulación del régimen de inversión de los fondos de pensiones de Brasil y México.

Clasificación JEL: C58, G13, G15, Q4.

Palabras clave: Mercados de futuros emergentes, razones de cobertura cuantílica multiescala, modelos de cobertura multiescala, análisis de ondoletas.

Effectiveness of hedging strategies based on a multiscale quantile regression model

Abstract

This paper aims to combine the wavelet theory and the quantile regression method to estimate multiscale quantile hedging ratios (MQHRs) and examine the hedging effectiveness at different time scales for Bovespa and S&P/BMV IPC stock indices futures mar for portfolios of the Bovespa and S&P/BMV IPC stock indices. The results show that the MQHRs and the hedging effectiveness increase as the hedge horizon increases. According to the variance and VaR reduction measures, the results indicate that the performance of the multiscale QR model has comparative advantages over the multiscale OLS model in improving the in-sample and out-of-sample hedging effectiveness, particularly for S&P/BMV IPC stock index futures. Therefore, the multiscale QR model has better predictive properties to reduce the base risk and the excess residual tail risk for the hedge portfolio. The findings have implications for the efficient capital allocation of risk-averse investors and the regulation over the investment rules of pension funds in Brazil and Mexico.

Clasificación JEL: C58, G13, G15, Q4.

Keywords: Emerging futures markets, multiscale quantile hedging ratios, multiscale hedging models, wavelet analysis.

¹ Corresponding Author. Email: rjg2005mx@yahoo.com.mx



1. Introducción

En las últimas décadas, la conexión de la volatilidad en los mercados financieros ha afectado la toma de decisiones financieras de los inversionistas institucionales y los administradores de portafolios debido a los efectos del contagio financiero. Los choques negativos de la crisis financiera global y la crisis sanitaria de COVID-19 han generado creciente incertidumbre y persistente volatilidad como consecuencia del rápido flujo de información hacia los mercados financieros globales. Estos eventos económicos han impactado negativamente a los precios de los títulos de capital y la diversificación internacional. De hecho, la literatura ha confirmado que la pandemia de COVID-19 ha afectado la relación de los rendimientos de los mercados financieros de Estados Unidos y los indicadores de volatilidad implícita, correlación y liquidez (Hasan et al., 2021; Zhang et al., 2020).

Debido a la vulnerabilidad de los mercados financieros en periodos de inestabilidad financiera, las bolsas de futuros se han caracterizado como importantes mecanismos para controlar la exposición al riesgo de precios con bajos costos de transacción y riesgo de incumplimiento nulo. Sin embargo, los efectos de la pandemia de COVID-19 han dado la pauta para cuestionar si las coberturas con contratos de futuros continúan siendo efectivas para compensar las pérdidas en los portafolios de inversión, particularmente en los países de economías emergentes. En el proceso de la cobertura, sin embargo, uno de los problemas de los inversionistas es determinar el número óptimo de contratos de futuros para amortiguar los efectos negativos del riesgo sistemático en las inversiones de portafolio. La cobertura naive (uno a uno) es efectiva cuando la correlación entre los rendimientos de los precios de contado y futuros es perfecta y el riesgo base es cero. Sin embargo, la falta de sincronización entre los mercados y la presencia de los costos de transacción hacen imposible el cumplimiento de estas condiciones en el mundo real.

Por lo que el diseño de coberturas óptimas requiere el uso de optimización matemática para minimizar la varianza del portafolio de cobertura. En este tenor, varios estudios han apoyado el desempeño del modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) para mejorar la efectividad de la cobertura en los mercados accionarios (Ederington, 1979; Baillie y Myers, 1991; Lien et al., 2002; Moon et al., 2009). Sin embargo, el modelo de MCO puede sobreestimar la efectividad de la cobertura debido a la autocorrelación observada en los residuales (Swanson y Caples, 1987). Para relajar este problema, Herbst et al. (1989) proponen el modelo vectorial autorregresivo (VAR) para mejorar la eficiencia de las coberturas, pero el modelo VAR omite la relación de cointegración entre los precios de contado y futuros. Chou et al. (1996) recogen la tendencia estocástica de largo plazo en la estimación de las razones de cobertura óptima (RCO) y mejoran la efectividad de las coberturas, pero la cobertura continúa siendo estática. Diversos estudios han confirmado que las RCO dinámicas de los modelos GARCH bivariados son más efectivas que las coberturas estáticas en términos de reducción del riesgo (Ceccheri et al., 1988; Kroner y Sultan, 1993; Park y Switzer, 1995; Choudhry, 2003; Lai, 2018). Sin embargo, en la literatura todavía no existe un consenso concluyente sobre un modelo de cobertura que predomine en los diferentes horizontes de cobertura (Miffre, 2004; Lee y Chien, 2010; Hasan et al., 2020; Buyukkara et al., 2022).

La cobertura no sólo depende del modelo estimado, sino también del efecto del horizonte de cobertura debido a que los coberturistas pueden tomar posiciones de futuros con diferentes vencimientos. De hecho, la literatura existente ha demostrado que la efectividad de la cobertura

tiende a incrementarse en los horizontes de cobertura más largos (Ederington, 1979; Hill y Schneeweis, 1982; Geppert, 1995). Sin embargo, la eficiencia de las coberturas fuera de la muestra puede ser inestable en los horizontes de cobertura más largos como documentan Malliaris y Urrutia (1991) y Benet (1992). Con datos de alta frecuencia, Chen et al. (2004) estudian los efectos del horizonte de tiempo en la efectividad de las coberturas. Los resultados revelan la existencia de una relación positiva entre las RCO, su eficiencia y el horizonte de cobertura.

Cotter y Hanly (2009) estiman las RCO con datos de frecuencia y escalados. La evidencia confirma que las RCO se incrementan cuando la frecuencia cambia de 1 a 5 y 20 días, respectivamente. No obstante, las RCO escaladas reducen mejor el riesgo dentro de la muestra, mientras que la evidencia fuera de la muestra es mixta. Asimismo, Juhl et al. (2012) muestran que la efectividad de las coberturas mejora notablemente en los horizontes de cobertura largos cuando la relación de cointegración es considerada. Utilizando datos de los mercados accionarios y futuros de Brasil y México, de Jesús, Bucio y Carvajal (2021) proponen el modelo VaR bayesiano para la estimación de las razones de cobertura de mínima varianza y evaluación de la efectividad de las coberturas para los horizontes de tiempo de 1, 5 y 20 días. Los resultados muestran que el desempeño del modelo de cobertura bayesiano es superior al desempeño de los modelos convencionales en los horizontes de tiempo de 1 y 5 días para el caso de Brasil, mientras que la evidencia empírica es mixta para el caso de México. Sin embargo, la técnica de ajuste de la frecuencia de los datos con el horizonte de cobertura es inapropiada debido a la reducción del tamaño de la muestra. Este problema podría afectar la estimación de las RCO y sesgar la efectividad de las coberturas para reducir la varianza del portafolio de cobertura por la pérdida de información importante en periodos de extrema volatilidad, y la falta de instrumentos para descomponer las series financieras en más de dos escalas de tiempo.

En este tenor, In y Kim (2006a, 2006b) y Chen et al. (2009) realizan la descomposición ortogonal de los rendimientos de los índices accionarios y futuros de Australia, Estados Unidos y Taiwán en diferentes escalas de tiempo, con el fin de estimar razones de cobertura multiescala (RCM) utilizando la teoría de ondoletas (wavelets). Los resultados indican que las RCM y la efectividad de las coberturas se incrementan notablemente en los horizontes de cobertura largos. Por su parte, Lien y Shrestha (2007) descomponen los rendimientos de varios activos financieros en diferentes escalas de tiempo para ajustarlos al horizonte de cobertura. Los hallazgos señalan que el modelo de corrección de error presenta mejor desempeño que los modelos multiescala para mejorar la efectividad de las coberturas dentro y fuera de la muestra en los horizontes de cobertura cortos y largos.

Conlon y Cotter (2012) combinan el análisis de ondoletas y el modelo de MCO con ventana móvil para la cobertura del índice accionario S&P 500, el tipo de cambio USD/GBP y petróleo. Bajo las medidas de reducción de varianza y VaR, los hallazgos evidencian que la efectividad de las coberturas dentro y fuera de la muestra se incrementan y convergen a 1 en los horizontes de cobertura más largos. Para el índice accionario FTSE 100, el índice del dólar estadounidense, oro y petróleo, Sultan et al. (2019) extienden el análisis de ondoletas a las estructuras de MCO, GARCH multivariados y redes neuronales para analizar las coberturas dependientes del tiempo. De acuerdo con las medidas de la utilidad y VaR, los modelos GARCH multivariados y redes neuronales mejoran la efectividad de las coberturas dentro y fuera de la muestra en la mayoría de los activos financieros. Sin embargo, la característica de no-linealidad observada en las series financieras puede reducir el

poder predictivo de los modelos de cobertura dinámica para el mejoramiento de la efectividad de las coberturas con futuros. Además, el análisis de la cobertura multiescala solo es evaluada en un punto de la distribución condicional de los rendimientos de contado y futuros a diferencia de un análisis por cuantiles.

La literatura ha demostrado que los modelos de copulas con innovaciones GARCH es otra alternativa para mejorar la efectividad de las coberturas dinámicas en la reducción de la varianza de los rendimientos del portafolio de cobertura. Este hecho se atribuye a que esta clase de modelos de cobertura describen mejor la estructura compleja de la dependencia no-lineal entre los rendimientos de contado y futuros (Hsu et al., 2008; Lai et al., 2009). Sin embargo, la evidencia empírica no es concluyente porque varios estudios han confirmado el desempeño inferior de los modelos GARCH-Copulas con respecto al desempeño del modelo de MCO como consecuencia de la presencia de persistencia espuria en la volatilidad, la cual es ocasionada por los cambios estructurales observados en las series financieras (Kotkatvuori-Örnberg, 2016; Xu y Lien, 2020; Zhou, 2016). Estos problemas pueden ser relajados utilizando la teoría de ondoletas y la función condicional cuantil a cuantil de la variable de respuesta.

En el contexto de los cambios estructurales, Lien et al. (2021) introducen un modelo de cobertura cuantil con cambio de régimen de Markov de dos estados para diferentes contratos de futuros. Los resultados de la reducción de varianza confirman que las estrategias de cobertura son más efectivas con el nuevo modelo de cobertura cuantil que con los modelos de cobertura convencionales en los estados de volatilidad alta y en los cuantiles extremos, es decir, 0.01, 0.02, 0.98 y 0.99. Sin embargo, el análisis de la efectividad de la cobertura solo se lleva a cabo para el horizonte de cobertura de un día, lo cual se puede distorsionar los resultados si se consideran horizontes de cobertura de 5, 10 y 20 días derivado del problema de reducción del tamaño de la muestra. Zainudin y Mohamad (2021) estudia la efectividad de la cobertura cruzada entre el índice accionario FTSE 100 y los futuros de mercados industrializados y emergentes aplicando los modelos de MCO, VEC y el análisis de ondoletas. Los resultados muestran que las coberturas cruzadas multiescala mejoran con los futuros de los índices accionarios E-Mini DJIA\$5 y S&P/ASX 200 de Australia.

Por su parte, Huang y Xiong (2023) proponen un análisis de cobertura basado en cuantiles a fin de estudiar las propiedades de las coberturas y el desempeño de los portafolios de 15 futuros de materias primas en China bajo condiciones de mercado extremas. Los resultados señalan que las razones de cobertura cuantílica varían con los cuantiles y la efectividad de las coberturas es consistente tanto dentro como fuera de la muestra, particularmente para las materias primas de los metales y agrícolas. Sinaga et al. (2024) evalúan las propiedades del oro como refugio y estrategia de cobertura para las fluctuaciones de los fondos cotizados en bolsa (ETF por sus siglas en ingles) y los portafolios de índices globales MSCI de mercados desarrollados y emergentes. Para ello, el modelo DCC-GARCH es extendido al contexto de la teoría de ondoletas para estimar las correlaciones cuantílicas multiescala. Los hallazgos indican que el oro puede utilizarse como una estrategia de cobertura en el corto y largo plazos para los mercados emergentes, mientras que para los mercados desarrollados solo es un estado de refugio en el largo plazo. Huang y Xiong (2025) analizan la capacidad de cobertura de los futuros de cerdo vivo con base en la comparación de modelos de cobertura tradicional el modelo de regresión por cuantiles dinámico. Los resultados empíricos confirman que los futuros de cerdo vivo son herramientas de cobertura útiles y la efectividad de la

cobertura se incrementa en los mercados de futuros bajistas, aunque tiende a disminuir con la falta de liquidez y alta volatilidad.

El objetivo de este trabajo es combinar el análisis de ondoletas y el modelo de regresión cuantílica para estimar las razones de cobertura cuantílica multiescala y evaluar la efectividad de las coberturas en los diferentes horizontes de cobertura de los inversionistas institucionales que participan en los mercados accionarios de Brasil y México. Las ondoletas son señales de onda corta, las cuales evolucionan con dominios de tiempo y frecuencia, aunque su oscilación es alrededor de cero. Como mecanismo natural de filtrado, el principal atractivo de las ondoletas es la capacidad para tratar las características cambiantes en el tiempo observadas en las series de tiempo originales (señal), por ejemplo, la propiedad de no estacionariedad. Asimismo, las características de conservación de información y la descomposición ortogonal de los datos en diversas escalas de tiempo permiten capturar importantes patrones de las series financieras, los cuales están asociados con la tendencia, discontinuidad, periodicidad, cambios estructurales, agrupamiento de volatilidad y cambios de régimen (Gencay et al., 2002). En los últimos años, varios estudios han reconocido la importancia de la teoría de ondoletas y la regresión por cuantiles en las finanzas. En este sentido, los riesgos sistemático y sistémico han sido analizados en el contexto multiescala de manera efectiva en los mercados accionarios de Europa y Medio Oriente (Alexandridis y Hasan, 2020; Xu et al., 2021). Asimismo, los modelos de correlación cuantílica multiescala también han tenido éxito en el análisis de los vínculos entre activos no-financieros y del sector bancario en Japón, en la interacción entre criptomonedas en el corto y largo plazos, así como en la conexión dinámica del estrés financiero a través de economías desarrolladas y emergentes (Almansour et al., 2023; Abakah et al., 2024; Long et al., 2024). El estudio pretende contestar las siguientes preguntas: ¿El análisis de ondoletas puede mejorar el desempeño de los modelos de cobertura para administrar el riesgo de los inversionistas con base en las preferencias para un determinado horizonte de cobertura? ¿Las RCCM pueden estabilizar la eficiencia de las coberturas?

El trabajo proporciona varias contribuciones a la literatura. El análisis de ondoletas y el modelo de regresión cuantílica se extienden a los mercados de futuros de los índices accionarios Bovespa y S&P/BMV IPC para estimar las RCCM y mejorar el desempeño de la cobertura del riesgo. Hasta el momento no existe un estudio en la literatura que estime las RCCM en estos mercados accionarios emergentes. Asimismo, el modelo de regresión cuantílica tiene mejores propiedades que la aproximación tradicional, esto es, los estimadores cuantílicos no son sensibles a los eventos extremos. El modelo de regresión cuantílica también puede capturar apropiadamente los diferentes niveles de asimetría y la heterocedasticidad observadas en las series financieras. De esta manera, la información obtenida puede ser relevante para la toma de decisiones de los inversionistas institucionales, puesto que las bolsas de valores de países emergentes presentan características más complejas y estructuras financieras frágiles. Otra de las contribuciones es la evaluación de la efectividad de las coberturas dentro y fuera de la muestra para el periodo del 3 de enero de 2000 al 30 de diciembre de 2022, al comparar el desempeño del modelo de regresión cuantílica multiescala (RC) con el del modelo de MCO multiescala utilizando las medidas de reducción de varianza y valor en riesgo (VaR). El periodo de análisis es interesante, dado que incluye varios eventos importantes tales como la crisis financiera global, la crisis soberana europea y la crisis sanitaria de COVID-19. Para el análisis de la efectividad de la cobertura fuera de la muestra se utilizan las varianzas de los rendimientos del portafolio de cobertura estimadas con una ventana móvil para el periodo del 2 de

enero de 2013 al 30 de diciembre de 2022. Este hecho es importante resaltar debido a que la mayoría de la literatura utiliza el cuadrado de los rendimientos de la varianza del portafolio de cobertura como proxy de la varianza para el periodo de análisis. Sin embargo, varios estudios han demostrado que está proxy de la varianza es muy ruidosa, lo que puede sesgar la efectividad de las coberturas.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. La Sección 2 describe la teoría de ondoletas y los modelos de cobertura. La Sección 3 describe los datos y el análisis preliminar. La evidencia es discutida en la Sección 4. El trabajo concluye en la Sección 5 con las conclusiones.

2. Metodología y Modelos de Cobertura

2.1. Análisis de ondoletas

Varias herramientas espectrales tradicionales existen en la literatura para resolver el problema de reducción del tamaño de la muestra en los datos de baja frecuencia. El análisis espacial transforma las series de tiempo en diferentes frecuencias mediante el valor de una función definida en un punto específico, pero no menciona nada acerca de la magnitud de la variabilidad. Por su parte, el análisis de Fourier realiza la transformación de las series de tiempo aplicando un proceso de descomposición frecuencia a frecuencia derivada de una simple combinación de funciones senos y cosenos. Sin embargo, este análisis no captura el comportamiento dinámico de las propiedades de dominio de frecuencia de las series de tiempo no estacionarias.

El análisis de ondoletas combina la transformada de Fourier y el análisis espacial para recoger información total de las series de tiempo en un amplio rango de frecuencias o diferentes niveles de resolución. Este procedimiento resuelve el problema de partición rectangular fija del espacio frecuencia-tiempo derivado de la transformada de Gabor (Gencay et al. 2002). De esta manera, la descripción compleja de la serie de tiempo original es definida por una combinación lineal de funciones base, también conocidas como ondoletas clasificadas por género. Las ondoletas padre $\phi(t)$ representan los componentes de suavización en la serie de tiempo seleccionada a escalas no refinadas con integral igual a 1. Las ondoletas madre $\psi(t)$ describen las desviaciones (coeficientes de traslación) que ocurren en los componentes de suavización y su integral tiene valor de 0. La secuencia de funciones de ondoletas padre y madre se definen de la siguiente forma:

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (1)$$

$$\phi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2)$$

donde j denota el índice de nivel, el cual está asociado con el parámetro de escala (dilatación) 2^j y k denota el índice de cambio asociado con el parámetro de traslación $2^j k$ (Bruce y Gao, 1996). La aproximación de series de ondoletas ortogonales para una señal $f(t)$ definida en el espacio de Hilbert $L^2(\mathcal{R})$, está determinada por:

$$f(t) \approx \sum_k b_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t) \quad (3)$$

donde J es el número de componentes de resolución y k varía de 1 al número de coeficientes en el componente definido. Los coeficientes $b_{j,k}$ describen el comportamiento suave implícito en la señal a escalas no refinadas y $d_{j,k}$ son coeficientes de detalle o cristales. Los coeficientes de suavización y detalle son aproximados con las siguientes integrales:

$$b_{j,k} \approx \int f(t) \phi_{j,k}(t) dt \quad (4)$$

$$d_{j,k} \approx \int f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (5)$$

donde el conjunto de coeficientes del nivel j están asociados con la escala $[2^{j-1}, 2^j]$.

La señal original $f(t)$ también puede descomponerse en componentes de señales ortogonales cada una asociada a una diferente escala de tiempo, es decir,

$$f(t) \approx B_{j,k}(t) + D_{j,k}(t) + D_{j-1,k}(t) + \dots + D_{1,k}(t) \quad (6)$$

Las funciones de las señales de suavización y detalle están definidas por

$$B_{j,k}(t) = \sum_k b_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (7)$$

$$D_{j,k}(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (8)$$

El análisis multiresolución es una técnica de filtración digital más robusta para la descomposición de las series de tiempo financieras en diferentes frecuencias con diferentes resoluciones. Asimismo, el análisis multiresolución permite conducir la descomposición de las series de tiempo discretas de la siguiente manera:

$$f_t \approx B_{j,t} + D_{j,t} + D_{j-1,t} + \dots + D_{1,t} \quad (9)$$

donde n observaciones de la serie de tiempo discreta son representadas por $f_1, f_2, \dots, f_n$ bajo el supuesto de que n es un número entero múltiplo de 2^J , lo que implica que el análisis de la transformada ondoleta discreta (TOD) se restringe a muestras de tamaño diádica 2^J .

Sin embargo, los coeficientes de las ondoletas y sus escalas son estimados por la transformada ondoleta discreta de máximo traslape (TODMT). La TODMT es una transformación no-diezmada con alto nivel de redundancia y no-ortogonal, la cual es empleada en economía y finanzas para resolver el problema de invariancia por traslaciones y la limitación del tamaño de la muestra a un múltiplo de 2^J (Percival y Walden, 2000).

Además, los coeficientes de detalle y suavización se asocian a filtros de fase-cero como la función de Daubechies de mínima asimetría MA (8),² con el fin de alinear los eventos de la serie de tiempo original con las características del análisis multiresolución. La TODMT emplea diferencias móviles y el operador promedio, lo que mantiene el número exacto de observaciones en cada una de

² Este filtro es frecuentemente utilizado a diferencia de las ondoletas HAAR debido a que es un filtro óptimo de pase de banda, véase Gencay et al. (2002).

las escalas de la descomposición ondoleta. Por lo que sus estimadores se caracterizan por ser asintóticamente más eficientes que los de la TOD (Gencay et al., 2002).

2.2. Modelo de MCO multiescala

La TODMT con filtro de Daubechies MA (8) descompone las series de los rendimientos de los precios de contado ΔS_t y futuros ΔF_t en diferentes componentes de la siguiente manera:

$$\Delta S_t = B_{j,t}^S + D_{j,t}^S + D_{j-1,t}^S + \dots + D_{1,t}^S \quad (10)$$

$$\Delta F_t = B_{j,t}^F + D_{j,t}^F + D_{j-1,t}^F + \dots + D_{1,t}^F \quad (11)$$

donde el j -ésimo componente de detalle $D_{j,t}$ está asociado a los cambios de escala de tiempo de longitud $2^{j-1}\Delta t$. Para datos diarios, $D_{1,t}$ indica cambios en la escala de tiempo que ocurren en el intervalo 1-2 días. $D_{2,t}$ son cambios en la escala de tiempo que oscilan en el intervalo 2-4 días, así sucesivamente hasta $D_{j,t}$. El componente de suavización $B_{j,t}$ indica cambios en la escala de tiempo de orden 2^J o más largas. Para solucionar el problema del número entero J más grande relacionado con el tamaño de la muestra n . El valor máximo de J debe ser menor a $\log_2(n)$.

Por su parte, el rendimiento fuera de la muestra del portafolio de cobertura para una posición larga está definido por

$$\Delta C_t = \Delta S_t - \beta_t \Delta F_t \quad (12)$$

donde ΔS_t y ΔF_t son los rendimientos transformados por ondoletas. β_t es la RCO, la cual se obtiene al minimizar la varianza condicional de la ecuación (12) con respecto a β_t , es decir,

$$\beta_t = \frac{\text{Cov}(\Delta S_t, \Delta F_t | I_t)}{\text{Var}(\Delta F_t | I_t)} \quad (13)$$

donde I_t es el conjunto de información en el tiempo t .

Una vez realizada la descomposición de las series financieras originales, las RCO multiescala son estimadas por J regresiones lineales utilizando J niveles de la siguiente manera:

$$D_{j,t}^S = \alpha_{j,0} + \beta_{j,1} D_{j,t}^F + \varepsilon_{j,t}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (14)$$

donde $\beta_{j,1}$ es la RCO multiescala asociada a la j -ésima escala. Sin embargo, el modelo de MCO no captura el grado de variación en el tiempo en la relación promedio bajo condiciones normales y extremas de mercado, así como los diferentes niveles de asimetría en las series de rendimientos financieros.

2.3. Modelo de regresión cuantílica multiescala

El modelo de regresión cuantílica (RC) proporciona un marco claro y completo para describir la relación entre variables dependiente e independiente en diferentes cuantiles de la distribución condicional de la variable de respuesta (Koenker y Bassett, 1978). Asimismo, Koenker y Hallock (2001) argumentan que el modelo de RC captura apropiadamente las características estilizadas de

las series financieras tales como los eventos extremos, los diferentes niveles de asimetría y la heterocedasticidad observada en la variable dependiente.

En este contexto, Lien et al. (2016) es el pionero que introduce el concepto de razón de cobertura cuantílica basado en el modelo de regresión cuantílica.

El procedimiento del método se describe de la siguiente manera. Para una variable aleatoria Y con función de distribución acumulada continua $F(y) = P(Y \leq y)$, el τ -ésimo cuantil de Y está definido por

$$Q(\tau) = F^{-1}(\tau) = \inf(y: F_Y(y) \geq \tau), \quad \tau \in [0,1] \quad (15)$$

En términos generales, la modelación del τ -ésimo cuantil condicional de la variable dependiente y_t dado la variable independiente x_t se puede expresar como

$$Q_{y_t}(\tau|x_t) = \alpha(\tau) + \beta(\tau)x_t \quad (16)$$

donde $\alpha(\tau)$ es el intercepto, el cual va a depender de τ -ésimo cuantil. El coeficiente $\beta(\tau)$ determina la relación de la estructura de dependencia de y_t basada en el vector de variables explicativas x_t para $\tau \in [0,1]$.

En el marco del análisis de ondoletas, las razones de cobertura cuantílica son estimadas para cada una de las escalas de tiempo utilizando la descomposición de los rendimientos de contado y futuros definidos por las ecuaciones (10) y (11). En consecuencia, el modelo de RC multiescala de $D_{j,t}^S$ dado $D_{j,t}^F$ se define como

$$Q_{D_{j,t}^S}(\tau|D_{j,t}^F) = \alpha_{j,0}(\tau) + \beta_{j,1}(\tau)D_{j,t}^F \quad (17)$$

donde $\alpha_{j,0}(\tau)$ describe el efecto no observado. $\beta_{j,1}(\tau)$ es el vector de coeficientes asociado con la variable $D_{j,t}^F$ para el cuantil τ , el cual es estimado de la misma manera que el procedimiento tradicional, es decir,

$$\hat{\beta}_{j,1}(\tau) = \underset{\beta \in R^P}{\operatorname{argmín}} L_S(\alpha_{j,0}(\tau), \beta_{j,1}(\tau)) = \underset{\beta \in R^P}{\operatorname{argmín}} \sum_{t=1}^n \rho_{\tau}(D_{j,t}^S - \alpha_{j,0}(\tau) - \beta_{j,1}(\tau)D_{j,t}^F) \quad (18)$$

donde $L_S(\alpha_{j,0}(\tau), \beta_{j,1}(\tau))$ es la función de pérdidas muestral si $\rho_{\tau}(u) = u(\tau - I(u < 0))$ es un factor de ponderación, también conocida como una función de verificación y $I(\cdot)$ es una función indicadora con $u = D_{j,t}^S - \alpha_{j,0}(\tau) - \beta_{j,1}(\tau)D_{j,t}^F$. Por consiguiente, la estimación del coeficiente $\beta_{j,1}(\tau)$ denota la RCCM para el cuantil τ .

3. Datos y Análisis Preliminar

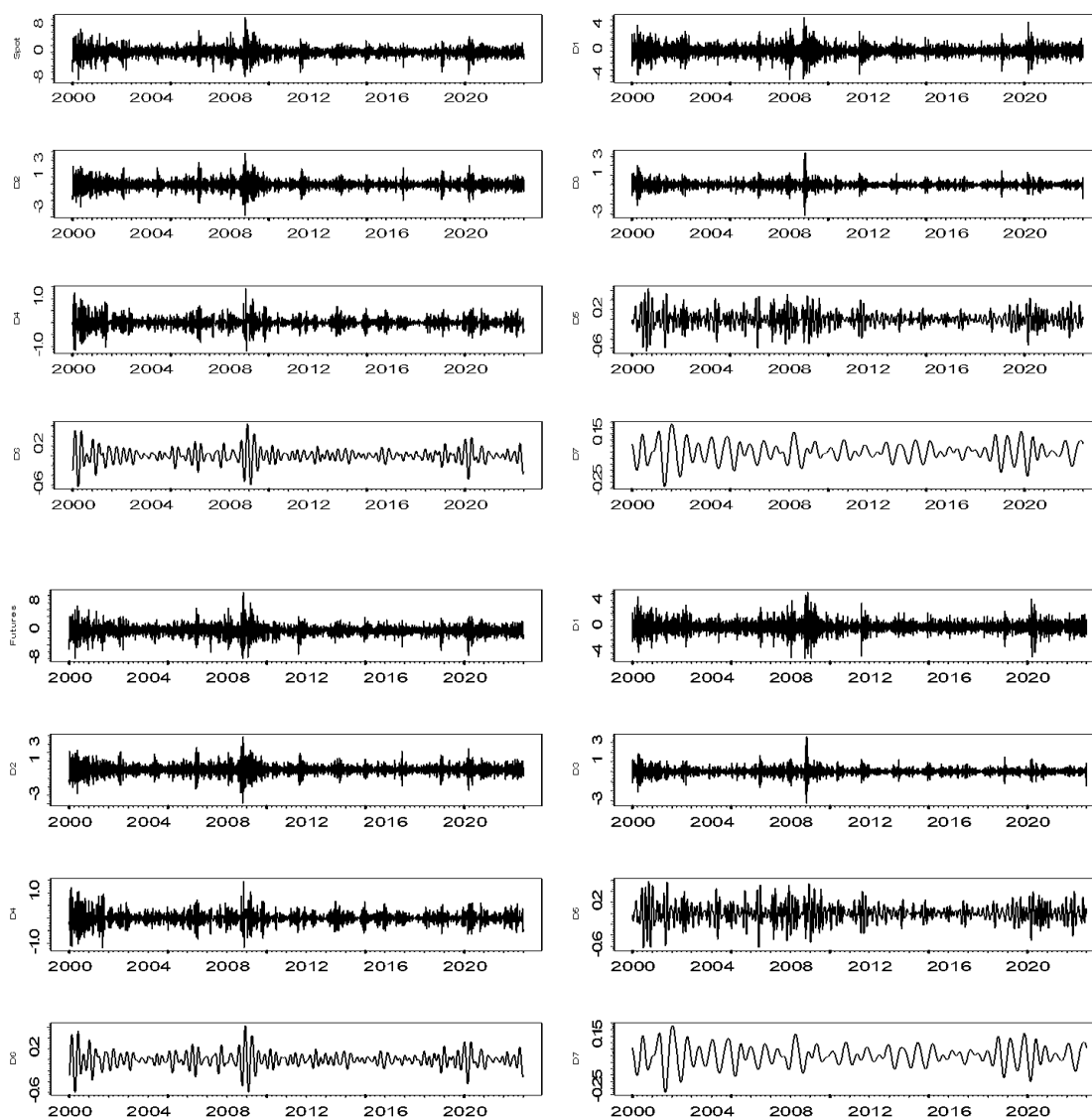
3.1. Descripción de los datos

Este estudio analiza la efectividad de la cobertura dependiente del tiempo utilizando los precios diarios de cierre de contado y futuros de los índices accionarios de la Bolsa Mexicana de Valores (S&P/BMV IPC) y la Bolsa de Valores de Sao Paulo (Bovespa). El análisis cubre el periodo del 3 de enero de 2000 al 30 de diciembre de 2022, totalizando 5787 y 5699 observaciones, respectivamente. La muestra se divide en dos submuestras a fin de capturar los efectos dinámicos en las RCCM. El análisis dentro de la muestra comprende del 3 de enero de 2000 al 31 de diciembre de 2012, mientras que el análisis fuera de la muestra abarca del 4 de enero de 2013 al 30 de diciembre de 2022. Las series financieras se obtuvieron de la base de datos de Bloomberg.

3.2. Estadísticas básicas

El análisis inicia con la transformación de los rendimientos continuos de los precios de contado y futuros en diferentes escalas de tiempo utilizando la TODMT y el filtro de Daubechies MA (8). Las escalas de tiempo corresponden: 1→1-2 días, 2→2-4 días, 3→4-8 días, 4→8-16 días, 5→16-32 días, 6→32-64 días y 7→64-128 días. La Figura 1 muestra el comportamiento de los rendimientos originales de los mercados accionarios y futuros del S&P/BMV IPC, y su descomposición ondoleta para 7 niveles de resolución.

Gráfica 1. Descomposición por ondoletas de los rendimientos de contado y futuros del IPC.



Fuente: elaboración propia

En ambos mercados se puede observar la presencia de episodios de alta y baja volatilidad generada por la crisis financiera global en 2008-2009 y la crisis sanitaria de COVID-19 en el primer trimestre de 2020. El impacto de estos eventos es observado claramente en los componentes de detalle D1-D5 y su intensidad comienza a disminuir a partir de D6, lo que implica que los choques de corto plazo no tienen efecto alguno en los movimientos de largo plazo de los mercados de contado y futuros. Además, la presencia de patrones similares y fluctuaciones más suaves son observados en D7. El comportamiento es similar para los mercados de contado y futuros del índice accionario Bovespa.³

La Tabla 1 reporta las estadísticas básicas de los rendimientos originales y transformados por ondoletas. La media de los rendimientos originales es pequeña y 0 para los rendimientos transformados por ondoletas. Este hecho es justificado por el valor de la integral de la ondoleta madre. La desviación estándar de los rendimientos originales y escalados es alta, pero su valor disminuye en la medida que la escala de tiempo se incrementa. El coeficiente de asimetría es mixto y carece de un patrón sistemático en las diferentes escalas de tiempo. Exceso de curtosis es observado en los rendimientos, aunque su magnitud tiende a disminuir gradualmente en las escalas de tiempo más grandes, lo que implica que la distribución de rendimientos presenta propiedades de colas más gordas que la distribución normal. Este hallazgo es confirmado por el valor del estadístico Jarque-Bera (JB).

Tabla 1. Estadísticas descriptivas para los rendimientos originales y transformados.

Panel A: Descomposición para los rendimientos del índice Bovespa de Sao Paulo								
Contado	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sego	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.0375	-15.9938	13.6782	1.8163	-0.3654	9.5290	9353***	1398***
D1	0.0000	-12.9313	15.6234	1.2167	0.2005	15.3724	33187***	3035***
D2	0.0000	-6.6486	6.2725	0.7239	0.0616	8.5480	6673***	3274***
D3	0.0000	-3.8389	3.9915	0.5203	0.0171	6.5661	2757***	5043***
D4	0.0000	-1.6881	1.4330	0.3149	-0.0403	4.2325	303***	5189***
D5	0.0000	-1.3389	1.1771	0.2155	-0.1485	6.1341	2147***	5193***
D6	0.0000	-0.7956	0.5678	0.1858	-0.1458	4.0015	235***	5153***
D7	0.0000	-0.4531	0.3835	0.1245	-0.1326	3.2667	30***	5194***
Futuros	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sego	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.0369	-16.2461	13.6564	1.8614	-0.3941	8.8421	7527***	1378***
D1	0.0000	-14.1092	16.2881	1.2578	0.1653	15.5302	34019***	3151***
D2	0.0000	-5.8602	5.4806	0.7372	0.0499	6.2896	2347***	3023***
D3	0.0000	-3.9596	3.8530	0.5312	0.0057	6.1965	2214***	5050***
D4	0.0000	-1.7304	1.3888	0.3100	-0.0746	4.3721	413***	5190***
D5	0.0000	-1.3786	1.2096	0.2302	-0.1306	5.7566	1714***	5193***
D6	0.0000	-0.8044	0.5422	0.1862	-0.1547	3.9725	225***	5192***
D7	0.0000	-0.4555	0.3836	0.1243	-0.1166	3.3162	33***	5189***
Panel B: Descomposición para los rendimientos del índice accionario de la BMV								
Contado	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sego	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.0346	-8.2673	10.4407	1.2789	-0.0397	8.2515	6067***	776***
D1	0.0000	-4.6905	5.3924	0.7819	0.0551	7.0253	3558***	1795***
D2	0.0000	-3.8326	3.9112	0.5418	0.0193	7.1651	3818***	3192***
D3	0.0000	-3.1988	3.3235	0.3965	0.0537	9.2741	8665***	5161***
D4	0.0000	-1.1761	1.4158	0.2522	0.0833	5.6028	1496***	5271***
D5	0.0000	-0.6550	0.6395	0.1708	-0.0778	4.2983	376***	5274***

³ Por falta de espacio no se reporta las gráficas para los mercados de Brasil, pero están disponibles para cualquier aclaración.

D6	0.0000	-0.5911	0.6377	0.1415	-0.0789	6.0488	2949***	5273***
D7	0.0000	-0.2872	0.2340	0.0822	-0.1550	3.3684	51***	5274***
Futuros	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sego	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.0339	-8.0341	10.9541	1.3143	-0.0159	8.4192	6462***	818***
D1	0.0000	-4.8968	5.2897	0.8118	0.0678	7.2638	4003***	1943***
D2	0.0000	-3.9618	3.8532	0.5508	0.0208	6.9031	3353***	3094***
D3	0.0000	-3.3113	3.6056	0.4057	0.0796	9.7542	10046***	5156***
D4	0.0000	-1.1802	1.4660	0.2643	0.0886	5.5436	1430***	5272***
D5	0.0000	-0.6337	0.5875	0.1732	-0.0791	4.1773	310***	5273***
D6	0.0000	-0.5997	0.6352	0.1417	-0.0567	5.9227	1884***	5274***
D7	0.0000	-0.2834	0.2307	0.0816	-0.1485	3.3519	46***	5274***

Fuente: elaboración propia

El valor significativo del estadístico de la prueba del multiplicador de Lagrange indica la presencia de efectos ARCH de orden 12 en todos los rendimientos originales y transformados por ondoletas. Este hecho estilizado de las series financieras es mejor apreciado en los rendimientos originales y transformados en las escalas de tiempo 1-5. Además, la intensidad de los efectos ARCH es más pronunciada en los periodos de crisis e inestabilidad financiera. De esta manera, la modelo de regresión por cuantiles es una alternativa para tratar los problemas de los diferentes niveles de asimetría, las colas anchas y la heterocedasticidad en las series de los rendimientos financieros.

4. Resultados empíricos

4.1 Razones de cobertura cuantílica multiescala

En esta sección se reportan las RCCM fuera de la muestra para los diferentes cuantiles: 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.6, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95. Las RCCM son reestimadas con una ventana móvil fija de 3961 y 4025 observaciones, respectivamente. El procedimiento consiste en remover la observación más remota y agregar la observación más reciente al periodo dentro de la muestra. De esta manera, el tamaño de la muestra se mantiene fijo y las estimaciones no se traslapan. El proceso es repetido para todas las observaciones del periodo fuera de la muestra.

En la Tabla 2 se muestran el valor promedio de las RCCM fuera de la muestra del modelo de RC multiescala para 19 cuantiles de la distribución de los rendimientos accionarios del Bovespa y S&P/BMV IPC, así como el promedio de las RCM fuera de la muestra del modelo de MCO multiescala. Para las escalas de tiempo 1-4, el modelo de RC multiescala proporciona RCCM ligeramente más grandes o conservadoras que el modelo de MCO multiescala en la mayoría de los cuantiles de ambos mercados de futuros. Aunque las razones de cobertura de MCO multiescala son más conservadoras en los cuantiles de 0.05 a 0.40 de la escala de tiempo 4 para los futuros del índice accionario Bovespa y en los cuantiles 0.05-0.10 y 0.80-0.95 para el caso de los futuros del índice accionario S&P/BMV IPC. Para la escala de tiempo 5, la razón de cobertura de MCO multiescala alcanza un valor más grande para los cuantiles intermedios entre 0.20-0.80 de la distribución de rendimientos condicional del Bovespa, mientras que la evidencia empírica es mixta para los futuros del índice S&P/BMV IPC, puesto que las RCCM superan a las RCM de MCO a partir del cuantil 40. Por su parte, el modelo de

MCO proporciona las RCM más conservadoras en los cuantiles intermedios de la escala de tiempo 6 para ambos mercados de futuros, mientras que los resultados presentan un comportamiento mixto para la escala de tiempo 7.

En un análisis más profundo para ambos mercados de futuros se puede observar que las RCCM del cuantil 0.50 son mayores a las RCM de MCO en las escalas de tiempo 1-4, particularmente para los futuros del índice S&P/BMV IPC. Este hallazgo indica que las RCCM presenta un patrón en forma de U invertida a través de los cuantiles de la distribución de rendimientos de los precios de contado, lo que indica que los valores de las RCCM de los cuantiles intermedios son más grandes con respecto a los cuantiles extremos. Aunque la extensión en la forma de U invertida varía a través de los diferentes mercados de futuros. Para el caso de los futuros del índice Bovespa, las RCCM son muy uniformes excepto para la escala de tiempo 4, mientras que la relación en forma de U invertida es más pronunciada para los futuros del índice S&P/BMV IPC. Por ejemplo, las RCCM en los cuantiles 0.05, 0.50 y 0.95 alcanzan valores de 0.906, 0.938 y 0.907 para la escala de tiempo 1 y 0.940, 0.970 y 0.941 para la escala de tiempo 4, respectivamente. Este hallazgo implica que si los rendimientos de contado se encuentran en los cuantiles 0.05 y 0.95 de la distribución condicional, las RCM de MCO conducen a una sobre cobertura del riesgo. Por otro lado, la estrategia de cobertura de MCO está subestimada cuando el rendimiento de contado se encuentra en el cuantil 0.50. Estos resultados se encuentran en línea con la evidencia empírica reportada por Lien et al. (2021).

Asimismo, las RCCM son relativamente estables a través de los diferentes cuantiles de la distribución de rendimientos, particularmente en las escalas de tiempo 6 y 7. Este hecho se atribuye a que el ruido generado por fluctuaciones extremas es eliminado con la descomposición de los rendimientos originales. Por lo que la presencia de outliers no tiene efecto alguno en las estimaciones de las razones de cobertura cuantílica, lo que confirma la capacidad del modelo de RC para recoger apropiadamente los cambios estructurales generados por la crisis financiera global y la crisis sanitaria de COVID-19. Otro hallazgo importante es que las RCCM y RCM de ambos modelos de cobertura convergen a la cobertura uno a uno en la medida que el horizonte de cobertura se incrementa, lo que conduce a una estrategia de cobertura más consistente, particularmente en las escalas de tiempo 6 y 7. La justificación de este resultado se debe a que las razones de cobertura de mínima varianza dependen del comportamiento de la relación entre los cambios en los precios de contado y los cambios en los precios de los futuros. En otras palabras, la eficiencia informacional de los mercados de futuros que coadyuva en la fijación de los precios.

Tabla 2. Estimaciones de las razones de cobertura cuantílica multiescala.

Panel C: Descomposición para los rendimientos de la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) de 28 días de México								
Contado	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sesgo	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.1358	-6.3292	5.3222	0.3644	0.1433	124.1887	3201121***	32***
D1	0.0000	-4.8904	4.2863	0.2541	-1.0701	116.7042	2820591***	1056***
D2	0.0000	-2.8432	2.4731	0.1737	-0.7557	74.6849	1124202***	3522***
D3	0.0000	-1.1189	1.1560	0.1054	-0.0059	27.4250	132130***	4956***
D4	0.0000	-0.7992	0.7992	0.0856	-0.0445	29.5025	155708***	5232***
D5	0.0000	-0.4213	0.3558	0.0610	-0.2024	16.0022	41121***	5186***
D6	0.0000	-0.2297	0.2455	0.0406	0.0857	11.3032	16783***	5157***
D7	0.0000	-0.1496	0.1398	0.0257	-0.0575	7.6647	5277***	4903***
Futuros	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sesgo	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.1208	-6.1010	5.3222	0.3677	-0.8603	108.5165	2467722***	31***
D1	0.0000	-4.6880	4.2863	0.2579	-2.0793	104.5218	2272874***	841***

D2	0.0000	-3.0479	2.4731	0.1779	-1.3871	73.3131	1085701***	2746***
D3	0.0000	-1.0826	1.1560	0.1063	-0.4252	27.7649	136367***	4462***
D4	0.0000	-0.7414	0.7992	0.0864	-0.2617	28.9640	149809***	5131***
D5	0.0000	-0.4198	0.3558	0.0619	-0.3098	15.5357	38309***	5146***
D6	0.0000	-0.2332	0.2455	0.0413	-0.0508	10.9781	15494***	5156***
D7	0.0000	-0.1474	0.1398	0.0261	-0.0940	7.4588	4834***	4906***
Panel D: Descomposición para los rendimientos de la tasa Selic a un día de Brasil								
Contado	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sesgo	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.1395	-2.4739	0.1624	0.1484	-	118.3594	2922140***	34***
D1	0.0000	-1.6944	1.6519	0.1176	-0.9284	96.4144	1910892***	787***
D2	0.0000	-1.0365	0.8899	0.0819	-0.9163	55.4139	629415***	3420***
D3	0.0000	-0.7307	0.7416	0.0668	-0.3904	53.7470	589308***	5199***
D4	0.0000	-0.4197	0.3220	0.0482	-1.5631	32.7749	209994***	5263***
D5	0.0000	-0.1493	0.2533	0.0306	0.6678	16.0290	41784***	5247***
D6	0.0000	-0.1233	0.1277	0.0187	-0.0730	11.1475	16164***	5193***
D7	0.0000	-0.0666	0.0570	0.0113	-0.1832	7.9269	5893***	5193***
Futuros	Media	Mínimo	Máximo	DE	Sesgo	Curtosis	JB	ARCH
Original	0.1356	-2.4739	0.3685	0.1470	-	115.4508	2776793***	29***
D1	0.0000	-1.6944	1.6523	0.1169	-0.8208	95.2598	1864000***	589***
D2	0.0000	-1.0365	0.8527	0.0813	-0.8266	54.8818	616663***	3018***
D3	0.0000	-0.7307	0.7435	0.0664	-0.2893	53.3847	580882***	5127***
D4	0.0000	-0.4197	0.3216	0.0478	-1.4769	32.1803	201912***	5274***
D5	0.0000	-0.1493	0.2533	0.0302	0.7262	15.8257	40548***	5263***
D6	0.0000	-0.1233	0.1277	0.0184	-0.0660	11.1566	16198***	5209***
D7	0.0000	-0.0666	0.0570	0.0112	-0.1700	7.8517	5713***	5202***

Fuente: elaboración propia

En este contexto, la relación entre la fijación de precios y las razones de cobertura óptima asume que las RCCM deben ser menores a la cobertura uno a uno cuando la fijación de los precios ocurre principalmente en el mercado de futuros. La magnitud y la velocidad de los cambios en los precios de los futuros en respuesta a cambios en los precios eficientes tendrían un impacto más alto en comparación a los cambios en los precios de contado y viceversa. Por otra parte, las RCCM serían aproximadamente igual a uno cuando la fijación de precios ocurra en forma paralela en ambos mercados de contado y futuros, es decir, los cambios en los precios de contado y futuros sean más o menos iguales. De esta manera, las RCCM convergerán a la cobertura tradicional en la medida que la escala de tiempo se incrementa, incluso en las escalas de tiempo menos largas como en el caso de los futuros del índice accionario Bovespa. La razón se debe a la existencia de ruido en los datos en algunos periodos, el cual es generado por la variabilidad en el diferencial entre el precio de futuros y el precio de contado, también conocido como riesgo base. Sin embargo, el horizonte de 8-16 días de la escala 4 es suficiente tiempo para que los mercados de contado y futuros puedan asimilar la información nueva que afectará inmediatamente al precio eficiente. Estos hallazgos se encuentran en línea con la evidencia de Conlon y Cotter (2012) y Sultan et al. (2019). Asimismo, los hallazgos tienen beneficios económicos para los inversionistas institucionales adversos al riesgo. Los coberturistas puede reducir considerablemente los costos de transacción asociados con los cambios en las razones de cobertura en los horizontes más cortos debido al rebalanceo periódico de los portafolios de cobertura.

4.2. Evaluación de la efectividad de la cobertura dentro de la muestra

Los inversionistas institucionales no solo toman posiciones en los mercados de futuros para mitigar la exposición al riesgo de precios, sino también evalúan la efectividad de las coberturas.

La varianza del portafolio de cobertura se obtiene de la siguiente manera:

$$\text{Var}(\Delta C_t) = \text{Var}(-\Delta S_t + \beta_t \Delta F_t) \quad (19)$$

donde ΔS_t y ΔF_t son los rendimientos de contado y futuros transformados por ondoletas.

En la literatura existen varios criterios para evaluar el desempeño de los modelos de cobertura o la efectividad de la cobertura. Una de las métricas más utilizadas es el índice eficiente de cobertura. Este indicador se define como la diferencia entre las varianzas de los portafolios sin y con cobertura dividido por la varianza de la posición sin cobertura. Por lo que el índice eficiente de cobertura (HE) se puede definir de la siguiente forma:

$$\text{HE} = \left(\frac{\text{Var}(\Delta S_t) - \text{Var}(\Delta C_t)}{\text{Var}(\Delta S_t)} \right) 100 \quad (20)$$

donde la cobertura con futuros elimina el riesgo total cuando el HE alcanza el valor de 100%.

De acuerdo con Shrestha et al. (2018), la razón de cobertura cuantílica se obtiene al minimizar la función de pérdidas muestral $L_S(\alpha(\tau), \beta(\tau))$ con respecto a los parámetros $\alpha(\tau)$ y $\beta(\tau)$ para un cuantil dado τ . De esta manera, si la función de pérdidas muestral está definida como $L_S(\alpha_{j,0}(\tau), \beta_{j,1}(\tau))$ en el contexto del análisis de ondoletas. La efectividad de la cobertura para la razón de cobertura cuantílica multiescala se puede definir de la siguiente manera:

$$\text{HE}(\tau) = \left(\frac{\text{Var}(D_{j,t}^S(\tau)) - \text{Var}(C_{j,t}^{S,F}(\tau))}{\text{Var}(D_{j,t}^S(\tau))} \right) 100 \quad (21)$$

donde $\text{Var}(C_{j,t}^{S,F}(\tau)) = \arg\min_{\beta \in R^P} L_S(\alpha_{j,0}(\tau), \beta_{j,1}(\tau))$ representa el valor mínimo de la función de pérdidas muestral basado en la selección óptima de la posición de futuros para un determinado cuantil τ y escala de tiempo de acuerdo con la teoría de ondoletas, mientras que

$\text{Var}(C_{j,t}^{S,F}(\tau)) = \arg\min_{\beta \in R^P} L_S(\alpha_{j,0}(\tau), \beta_{j,1}(\tau)) | \alpha_{j,0}(\tau) = 0, \beta_{j,1}(\tau) = 0$ es el valor mínimo de la función de pérdidas muestral para el portafolio que no contiene ninguna posición de futuros. Por lo que un valor cercano a 100 del $\text{HE}(\tau)$ representa una razón de cobertura cuantílica multiescala más efectiva que la estrategia sin cobertura.

Por su parte, la medida valor en riesgo (VaR) es otro criterio utilizado para la evaluación del desempeño de los modelos de cobertura. Para hacer breve la discusión de esta medida, el VaR al 95% para los rendimientos del portafolio de cobertura se calcula de la siguiente manera:

$$\text{VaR}_\alpha(\Delta C_t) = E(\Delta C_t) + Z_\alpha \sqrt{\text{Var}(\Delta C_t)} \quad (22)$$

donde Z_α es el percentil de la distribución normal para un nivel de confianza $\alpha = 0.95$.

$$\text{HE}_{\text{VaR}}(\tau) = \left(\frac{\text{VaR}_{\alpha}(D_{j,t}^S(\tau)) - \text{VaR}_{\alpha}(C_{j,t}^{S,F}(\tau))}{\text{VaR}_{\alpha}(D_{j,t}^S(\tau))} \right) 100 \quad (23)$$

Las Tablas 3 y 4 muestran los resultados del desempeño dentro de la muestra de los modelos de cobertura basados en los índices de reducción de la varianza y VaR para el mercado de futuros de los índices accionarios Bovespa y S&P/BMV IPC para 19 cuantiles de la distribución condicional y 7 escalas de tiempo. De acuerdo con el valor de los índices $HE(\tau)$ y $HE_{VaR}(\tau)$, las estrategias de cobertura del modelo de RC multiescala son superiores a las coberturas del modelo de MCO multiescala en todas las escalas de tiempo y cuantiles, lo que destaca el potencial del modelo de cobertura propuesto para administrar el riesgo de los portafolios de los índices accionarios de Brasil y México. Asimismo, los resultados confirman nueva evidencia a la literatura, puesto que las estrategias de cobertura del modelo de RC multiescala no solo resuelven el problema de la reducción del tamaño de la muestra para los horizontes de cobertura largos, sino también mejoran la efectividad de las coberturas en todas las escalas de tiempo y la mayoría de los cuantiles. En consecuencia, los hallazgos no son consistentes con la evidencia empírica de Lien y Shrestha (2007), quienes confirman que el desempeño de los modelos de cobertura basados en la teoría de ondoletas no tiene ventajas comparativas con respecto a los modelos de cobertura convencional, particularmente en los horizontes de cobertura cortos.

Otro hallazgo relevante es que las RCCM y la efectividad de las coberturas se incrementan notablemente y convergen a 1 en la medida que el horizonte de cobertura se incrementa a través de los diferentes cuantiles. Esto implica que las estrategias de cobertura con futuros sobre índices accionarios es una excelente alternativa para proteger las inversiones de portafolio de los inversionistas institucionales que participan en los mercados accionarios de Brasil y México. Aunque es importante señalar que la efectividad de las coberturas puede disminuir en las escalas de tiempo más largas como resultado del número de propiedades no observadas en la descomposición de los rendimientos originales, por ejemplo, con los futuros del índice accionario Bovespa. Estas caídas significativas en la efectividad de las coberturas ocurren en periodos cuando el riesgo base es grande, lo que indica que los coberturistas aún están expuestos al riesgo base, incluso en los horizontes de cobertura más largos como documentan Conlon y Cotter (2012).

[illegible]

D7	99.54	99.57	99.57	99.57	99.57	99.57	99.57	99.56	99.57	99.57	99.57	99.56	99.56	99.56	99.57	99.57	99.56	99.56	99.57	98.45
Panel B: Efectividad de la cobertura dentro de la muestra para los futuros del índice S&P/BMV IPC basada en el criterio de reducción de varianza																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	89.93	89.92	89.91	89.86	89.83	89.83	89.78	89.76	89.76	89.76	89.77	89.76	89.79	89.84	89.86	89.86	89.88	89.93	89.91	89.37
D2	95.06	95.07	95.06	95.04	95.04	95.04	95.03	95.03	95.02	95.02	95.02	95.01	95.03	95.04	95.05	95.06	95.07	95.07	95.02	94.65
D3	96.38	96.43	96.42	96.42	96.41	96.39	96.39	96.39	96.39	96.38	96.38	96.39	96.39	96.40	96.41	96.41	96.42	96.43	96.37	95.49
D4	96.53	96.65	96.61	96.54	96.53	96.52	96.49	96.50	96.52	96.55	96.58	96.60	96.62	96.64	96.65	96.64	96.63	96.63	96.59	96.01
D5	96.81	96.96	97.03	97.02	97.04	97.04	97.05	97.06	97.06	97.05	97.05	97.05	97.05	97.05	97.05	97.05	97.05	97.04	97.00	96.04
D6	98.27	98.27	98.26	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.27	98.26	98.27	97.89
D7	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.84	99.82	99.81	98.65

Fuente: elaboración propia

Tabla 4. Comparación dentro de la muestra de la efectividad de la cobertura.

Panel A: Efectividad de la cobertura dentro de la muestra para los futuros del índice Bovespa basada en el criterio de reducción de VaR																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	60.54	60.59	60.57	60.57	60.57	60.56	60.55	60.53	60.51	60.52	60.51	60.53	60.55	60.55	60.58	60.59	60.60	60.60	60.59	59.98
D2	71.16	71.28	71.29	71.29	71.28	71.29	71.28	71.28	71.28	71.29	71.28	71.28	71.29	71.29	71.28	71.29	71.29	71.27	71.26	71.17
D3	79.78	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.80	79.77	79.79	79.79	79.79	78.95
D4	78.21	78.24	78.25	78.24	78.25	78.25	78.25	78.24	78.23	78.22	78.23	78.23	78.23	78.25	78.25	78.25	78.25	78.25	78.21	78.05
D5	72.06	72.21	72.27	72.30	72.30	72.30	72.29	72.27	72.28	72.26	72.27	72.27	72.29	72.30	72.26	72.23	72.20	72.28	72.01	
D6	93.55	93.56	93.56	93.56	93.54	93.55	93.55	93.55	93.55	93.56	93.56	93.56	93.56	93.56	93.56	93.56	93.56	93.56	93.35	93.00
D7	93.16	93.37	93.37	93.37	93.36	93.37	93.36	93.36	93.36	93.36	93.36	93.36	93.35	93.36	93.37	93.37	93.36	93.37	93.37	92.17
Panel B: Efectividad de la cobertura dentro de la muestra para los futuros del índice S&P/BMV IPC basada en el criterio de reducción de VaR																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	68.25	68.23	68.21	68.13	68.08	68.08	68.00	67.98	67.98	67.98	68.00	67.97	68.02	68.10	68.13	68.14	68.17	68.24	68.21	67.25
D2	77.79	77.83	77.80	77.77	77.75	77.75	77.73	77.73	77.71	77.71	77.72	77.70	77.73	77.75	77.79	77.80	77.83	77.82	77.71	77.01
D3	81.01	81.13	81.12	81.12	81.08	81.08	81.02	81.02	81.02	81.01	81.01	81.02	81.04	81.05	81.07	81.07	81.11	81.14	80.97	79.99
D4	81.41	81.73	81.62	81.42	81.39	81.36	81.30	81.31	81.36	81.46	81.52	81.58	81.64	81.71	81.73	81.70	81.68	81.67	81.56	81.12
D5	82.10	82.52	82.72	82.70	82.76	82.76	82.80	82.81	82.81	82.81	82.81	82.80	82.80	82.78	82.78	82.79	82.78	82.78	82.65	81.36
D6	86.72	86.69	86.66	86.69	86.71	86.72	86.71	86.72	86.71	86.71	86.71	86.71	86.72	86.72	86.71	86.71	86.71	86.64	86.71	85.02
D7	95.81	95.80	95.80	95.81	95.81	95.81	95.80	95.78	95.78	95.78	95.79	95.80	95.81	95.81	95.81	95.81	95.78	95.65	95.54	95.11

Fuente: elaboración propia

Por su parte, la convergencia de la efectividad de las coberturas presenta un comportamiento similar bajo la medida VaR, pero a un ritmo más lento. Los resultados son más débiles en comparación a los de la medida de reducción de varianza, lo que indica que el portafolio de la posición sin cobertura contiene exceso de riesgo de cola. De hecho, el modelo de RC multiescala incrementa la efectividad de la cobertura hasta la escala de tiempo 7.

Este hallazgo se atribuye a que la medida VaR captura mejor los momentos de orden superior a diferencia de la medida de reducción de varianza, que solo considera el segundo momento de la distribución de rendimientos. Otra explicación económica puede adjudicarse a la presencia de ruido de mayor amplitud o incertidumbre en los mercados de contado y futuros en las escalas de tiempo 1-5, como consecuencia de los efectos de la crisis financiera global y la crisis de deuda soberana europea. Estos hallazgos están en línea con los resultados de Conlon y Cotter (2012), particularmente para los futuros del índice accionario Bovespa.

4.3. Evaluación de la efectividad de las coberturas fuera de la muestra

En esta sección se analiza el desempeño fuera de la muestra de los modelos de cobertura bajo los criterios de reducción de varianza y VaR. Los valores de los $HE(\tau)$ y $HE_{VaR}(\tau)$ son calculados a través de una ventana móvil fija de aproximadamente 1250 observaciones para el periodo del 3 de enero

de 2013 al 30 de diciembre de 2022. En este contexto, las razones de cobertura cuantílica multiescala fuera de la muestra son utilizadas para determinar las varianzas de los rendimientos del portafolio de cobertura. En las Tablas 5 y 6 se muestran los promedios de los $HE(\tau)$ y $HE_{VaR}(\tau)$ para los futuros de los índices accionarios Bovespa y S&P/BMV IPC. En términos de reducción de la varianza, los resultados indican que el modelo de RC multiescala proporciona superior desempeño para mejorar la efectividad de las coberturas en la mayoría de las escalas de tiempo y cuantiles de la distribución de rendimientos. Aunque el modelo de MCO multiescala presenta mejor desempeño para reducir la exposición al riesgo del portafolio del índice accionario Bovespa en la escala de tiempo 1, especialmente en los cuantiles intermedios.

Sin embargo, los resultados del desempeño de la efectividad de las coberturas son mixtos bajo la medida VaR en ambos mercados de futuros. Para el caso de los futuros del índice accionario Bovespa, el modelo de RC multiescala generalmente presenta mejor desempeño que el modelo de MCO multiescala para reducir el riesgo en el portafolio de cobertura en las escalas de tiempo 2, 5 y 7 y mayoría de los cuantiles de la distribución de rendimientos. En contraste, el modelo de MCO multiescala proporciona estrategias de cobertura más efectivas en las escalas de tiempo 1, 4 y 6, mientras que ambos modelos de cobertura multiescala muestran similar efectividad de cobertura en la escala de tiempo 3, aunque es importante resaltar que el modelo de RC multiescala es favorecido en 11 de 19 cuantiles. Para los futuros del índice accionario S&P/BMV IPC, la superioridad del modelo de RC multiescala es notablemente en las escalas de tiempo 1, 3, 6 y 7, mientras que el modelo de MCO multiescala proporciona mejores estrategias de cobertura en las escalas de tiempo 2 y 4. Para la escala de tiempo 5, el desempeño de los modelos de cobertura es muy similar, aunque la efectividad de la cobertura del modelo de MCO multiescala es superior con respecto a 11 cuantiles del modelo de RC multiescala.

Tabla 5. Comparación fuera de la muestra de la efectividad de las coberturas.

Panel A: Efectividad de la cobertura fuera de la muestra para los futuros del índice Bovespa basada en el criterio de reducción de varianza																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	80.38	80.16	80.04	79.89	79.85	79.89	79.88	79.85	79.86	79.87	79.88	79.91	79.85	79.89	79.96	80.04	80.18	80.23	80.47	80.17
D2	89.94	89.97	90.02	90.05	90.05	90.04	90.02	90.01	90.00	90.00	89.99	90.01	90.00	89.99	90.00	89.97	89.98	89.99	89.83	89.90
D3	96.41	96.41	96.41	96.40	96.40	96.40	96.39	96.39	96.38	96.38	96.38	96.38	96.38	96.40	96.40	96.41	96.42	96.41	96.37	95.39
D4	97.15	97.15	97.15	97.15	97.16	97.15	97.15	97.15	97.15	97.14	97.14	97.14	97.14	97.14	97.14	97.14	97.14	97.15	97.15	96.75
D5	95.25	95.43	95.54	95.64	95.64	95.63	95.63	95.64	95.63	95.64	95.64	95.66	95.66	95.66	95.67	95.61	95.53	95.47	95.32	95.06
D6	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.88	99.87	98.88
D7	99.93	99.93	99.93	99.93	99.93	99.93	99.94	99.94	99.94	99.94	99.93	99.93	99.93	99.93	99.93	99.93	99.93	99.93	99.92	99.57
Panel B: Efectividad de la cobertura fuera de la muestra para los futuros del índice S&P/BMV IPC basada en el criterio de reducción de varianza																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	91.36	91.46	91.48	91.48	91.48	91.48	91.47	91.46	91.47	91.46	91.47	91.46	91.47	91.47	91.47	91.46	91.45	91.47	91.42	91.15
D2	95.72	95.71	95.70	95.70	95.70	95.70	95.70	95.70	95.70	95.70	95.70	95.70	95.71	95.71	95.73	95.73	95.74	95.73	95.73	95.47
D3	97.83	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.87	97.86	97.85	97.69
D4	98.36	98.40	98.41	98.41	98.40	98.40	98.40	98.39	98.39	98.40	98.41	98.40	98.40	98.40	98.40	98.39	98.39	98.38	98.40	98.24
D5	98.10	98.09	98.11	98.11	98.12	98.11	98.11	98.10	98.09	98.09	98.09	98.09	98.09	98.10	98.10	98.09	98.09	98.07	98.07	98.01
D6	98.80	98.84	98.85	98.86	98.85	98.85	98.85	98.86	98.86	98.87	98.87	98.87	98.86	98.85	98.85	98.85	98.84	98.84	98.81	97.89
D7	99.67	99.67	99.67	99.67	99.67	99.67	99.68	99.68	99.68	99.68	99.68	99.67	99.67	99.67	99.67	99.67	99.67	99.66	99.63	99.37

Fuente: elaboración propia

Tabla 6. Comparación fuera de la muestra de la efectividad de las coberturas.

Panel A: Efectividad de la cobertura fuera de la muestra para los futuros del índice Bovespa basada en el criterio de reducción de VaR																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	55.68	55.47	55.34	55.18	55.13	55.17	55.16	55.13	55.14	55.14	55.16	55.19	55.12	55.17	55.25	55.33	55.49	55.55	55.82	55.48
D2	68.26	68.34	68.42	68.46	68.47	68.46	68.43	68.40	68.40	68.39	68.37	68.40	68.40	68.38	68.40	68.34	68.36	68.37	68.12	68.24
D3	81.03	81.06	81.08	81.05	81.04	81.03	81.01	81.00	80.99	80.99	80.98	80.99	81.00	81.03	81.03	81.07	81.09	81.06	80.96	81.02
D4	83.17	83.11	83.14	83.13	83.14	83.13	83.13	83.12	83.12	83.10	83.10	83.09	83.09	83.09	83.08	83.11	83.10	83.13	83.13	83.13
D5	78.32	78.61	78.87	79.12	79.10	79.08	79.10	79.11	79.09	79.11	79.12	79.17	79.17	79.18	79.18	79.03	78.84	78.70	78.34	78.98
D6	96.45	96.58	96.55	96.53	96.54	96.54	96.56	96.57	96.56	96.56	96.56	96.56	96.55	96.55	96.56	96.57	96.55	96.54	96.45	96.60
D7	96.66	97.44	97.42	97.43	97.45	97.46	97.47	97.47	97.47	97.46	97.45	97.45	97.44	97.45	97.44	97.44	97.44	97.43	97.25	97.15
Panel B: Efectividad de la cobertura fuera de la muestra para los futuros del índice S&P/BMV IPC basada en el criterio de reducción de VaR																				
Cuantil	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	MCO
D1	70.61	70.79	70.81	70.82	70.81	70.82	70.79	70.78	70.79	70.78	70.80	70.79	70.80	70.79	70.80	70.77	70.77	70.79	70.71	70.38
D2	79.31	79.29	79.26	79.26	79.26	79.26	79.25	79.25	79.27	79.27	79.27	79.26	79.27	79.29	79.32	79.34	79.36	79.32	79.34	79.30
D3	85.30	85.40	85.42	85.43	85.42	85.42	85.42	85.41	85.42	85.42	85.42	85.42	85.42	85.42	85.43	85.42	85.41	85.39	85.33	85.37
D4	87.20	87.38	87.40	87.41	87.38	87.37	87.37	87.35	87.35	87.38	87.40	87.38	87.38	87.38	87.37	87.36	87.33	87.31	87.37	87.38
D5	86.20	86.16	86.24	86.26	86.27	86.26	86.24	86.22	86.17	86.16	86.17	86.17	86.18	86.20	86.20	86.17	86.16	86.10	86.08	86.19
D6	88.99	89.19	89.22	89.28	89.23	89.24	89.25	89.28	89.29	89.32	89.32	89.32	89.29	89.26	89.24	89.22	89.21	89.19	89.07	88.25
D7	94.25	94.25	94.24	94.22	94.22	94.26	94.27	94.27	94.27	94.27	94.26	94.26	94.25	94.25	94.24	94.22	94.22	94.18	93.95	93.99

Fuente: elaboración propia

Asimismo, la efectividad de las coberturas es estable y converge a 1 en las escalas de tiempo más grandes en ambos mercados de futuros, particularmente bajo la medida de reducción de varianza. En consecuencia, la efectividad de las coberturas fuera de la muestra mejora bastante en comparación con los resultados dentro de la muestra, particularmente bajo la medida VaR con incrementos del 9.27% (Bovespa) y 7.15% (S&P/BMV IPC) en las escalas de tiempo 5 y 4, respectivamente. La principal razón se debe a la reducción de curtosis en los rendimientos de los portafolios de cobertura y sin cobertura a partir de la escala de tiempo 3. De hecho, curtosis negativas se pueden observar en los datos, lo que implica que las colas de la distribución de rendimientos de ambos portafolios son más ligeras que las colas de la distribución normal. Estos resultados son alcanzados cuando la curtosis de los rendimientos del portafolio de cobertura es negativa o menor en comparación con la curtosis de los rendimientos del portafolio sin cobertura (-0.48 contra 5.92) o la curtosis de los rendimientos del portafolio de cobertura es mayor con respecto a la curtosis de los rendimientos de la posición riesgosa (1.51 contra 0.67). Los hallazgos son inconsistentes con los resultados del trabajo de Conlon y Cotter (2012), quienes reportan que el modelo de MCO multiescala presenta similar desempeño de cobertura dentro y fuera de la muestra.

Otro hallazgo importante es que las estrategias de cobertura con futuros del índice accionario S&P/BMV IPC son más efectivas en un 22.48, 15.48, 6.68, 4.89 y 9.19% con respecto aquellas de los futuros del índice accionario Bovespa en las escalas de tiempo 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente. Mientras que lo contrario ocurre en las escalas de tiempo 6 y 7 con incrementos del 7.49% y 2.51%, respectivamente. Por lo que los inversionistas institucionales nacionales e internacionales cuentan con un modelo de cobertura robusto para el diseño de estrategias de cobertura óptima que ayuden a reducir la incertidumbre en los precios de los mercados accionarios de Brasil y México, particularmente durante periodos de crisis financieras y sanitarias. Los hallazgos pueden tener implicaciones financieras favorables para las sociedades de inversión especializadas de los sistemas de pensiones de Brasil y México desde el punto de vista de la flexibilización de la regulación financiera en los límites del régimen de inversión.

5. Conclusiones

Este trabajo combina la teoría de ondas y el modelo de RC para estimar razones de cobertura cuantílica multiescala que coadyuven a incrementar la efectividad de las coberturas en diferentes escalas de tiempo y 19 cuantiles de la distribución de rendimientos de los índices accionarios Bovespa y S&P/BMV IPC. El desempeño del modelo de RC multiescala es comparado con el modelo de MCO multiescala tanto dentro como fuera de la muestra con base en las medidas de reducción de varianza y VaR. Los resultados revelan que las RCCM convergen al valor de uno cuando el horizonte de cobertura se incrementa en la mayoría de los cuantiles, incluso en escalas de tiempo más cortas. Este hecho confirma que las estrategias de cobertura son consistentes para mitigar el riesgo de precios en los portafolios de los índices accionarios. De acuerdo con los criterios de evaluación, el modelo de RC multiescala presenta superior desempeño dentro y fuera de la muestra para mejorar la efectividad de las coberturas con respecto al modelo de MCO multiescala en la mayoría de las escalas de tiempo y cuantiles de la distribución de rendimientos, particularmente para los portafolios del índice accionario S&P/BMV IPC. En términos de ventajas comparativas, las estrategias de cobertura fuera de la muestra son más efectivas que las coberturas dentro de la muestra debido a que la curtosis de los portafolios de cobertura tiende a disminuir en la medida que el horizonte de cobertura se incrementa, lo que contribuye a la reducción del riesgo base y los niveles de riesgo de cola. Los hallazgos tienen implicaciones económicas-financieras para la asignación eficiente de capital de las preferencias de los inversionistas institucionales nacionales e internacionales con ciertos horizontes de cobertura en mercados accionarios emergentes altamente volátiles. Asimismo, las autoridades reguladoras pueden flexibilizar los límites de régimen de inversión de las sociedades de inversión especializadas de los sistemas de pensiones de Brasil y México. Esto permitiría la colocación de un mayor porcentaje de las aportaciones de los trabajadores en instrumentos de renta variable, lo que puede conducir al desarrollo de los mercados de capital de Brasil y México a través de una mejor relación riesgo-rendimiento, diversificación internacional y el incremento de la liquidez del mercado.

Referencias

- [1] Abakah, E. J. A., Goodell, J. W., Sulong, Z., & Abdullah, M. (2024). Wavelet quantile correlation between DeFi assets and banking stocks. *Finance Research Letters*, 70, 106272. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2024.106272>
- [2] Alexandridis, A. K., & Hasan, M. S. (2020). Global financial crisis and multiscale systematic risk: Evidence from selected European stock markets. *International Journal of Finance & Economics*, 25(4), 518–546. <https://doi.org/10.1002/ijfe.1764>
- [3] Almansour, B. Y., Gulseven, O., & Tellez Gaytan, J. C. (2024). Examining long-term and short-term cryptocurrency interactions: A wavelet and quantile regression approach. *Industrial Engineering & Management Systems*, 23(3), 383–398. <https://doi.org/10.7232/iems.2024.23.3.383>

- [4] Baillie, R. T., & Myers, R. J. (1991). Bivariate GARCH estimation of the optimal commodity futures hedge. *Journal of Applied Econometrics*, 6(2), 109–124. <https://doi.org/10.1002/jae.3950060202>
- [5] Benet, B. A. (1992). Hedge period length and ex-ante futures hedging effectiveness: The case of foreign-exchange risk cross hedges. *Journal of Futures Markets*, 12(2), 163–175. <https://doi.org/10.1002/fut.3990120205>
- [6] Bruce, A., & Gao, H.-Y. (1996). *Applied wavelet analysis with S-PLUS*. Springer.
- [7] Büyükkara, G., Küçüközmen, C. C., & Uysal, E. T. (2022). Optimal hedge ratios and hedging effectiveness: An analysis of the Turkish futures market. *Borsa Istanbul Review*, 22(1), 92–102. <https://doi.org/10.1016/j.bir.2021.02.002>
- [8] Cecchetti, S. G., Cumby, R. E., & Figlewski, S. (1988). Estimation of the optimal futures hedge. *The Review of Economics and Statistics*, 70(4), 623–630. <https://doi.org/10.2307/1935825>
- [9] Chen, D.-H., Chen, W.-N., & Chuang, C.-L. (2009). Multiscale hedge ratio between Taiwan stock and futures index: An application of wavelet analysis. *Investment Management and Financial Innovations*, 6(1), 217–230.
- [10] Chen, S.-S., Lee, C.-F., & Shrestha, K. (2004). An empirical analysis of the relationship between the hedge ratio and hedging horizon: A simultaneous estimation of the short- and long-run hedge ratios. *Journal of Futures Markets*, 24(4), 359–386. <https://doi.org/10.1002/fut.10121>
- [11] Chou, W. L., Fan, K. K., & Lee, C. F. (1996). Hedging with the Nikkei index futures: The conventional model versus the error correction model. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 36(4), 495–505. [https://doi.org/10.1016/S1062-9769\(96\)90048-4](https://doi.org/10.1016/S1062-9769(96)90048-4)
- [12] Choudhry, T. (2003). Short-run deviations and optimal hedge ratio: Evidence from stock futures. *Journal of Multinational Financial Management*, 13(2), 171–192. [https://doi.org/10.1016/S1042-444X\(02\)00042-7](https://doi.org/10.1016/S1042-444X(02)00042-7)
- [13] Conlon, T., & Cotter, J. (2012). An empirical analysis of dynamic multiscale hedging using wavelet decomposition. *Journal of Futures Markets*, 32(3), 272–299. <https://doi.org/10.1002/fut.20519>
- [14] Cotter, J., & Hanly, J. (2009). Hedging: Scaling and the investor horizon. *Journal of Risk*, 12(2), 49–77. <https://doi.org/10.21314/JOR.2009.204>
- [15] de Jesús Gutiérrez, R., Bucio Pacheco, C., & Carvajal Gutiérrez, L. (2021). Razones de cobertura con futuros de los índices accionarios de Brasil y México. *Investigación Administrativa*, 50(128), 1–23. <https://doi.org/10.35426/iav50n128.06>
- [16] Ederington, L. H. (1979). The hedging performance of the new futures markets. *The Journal of Finance*, 34(1), 157–170. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1979.tb02077.x>
- [17] Gençay, R., Selçuk, F., & Whitcher, B. (2002). *An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-279670-8.X5000-9>
- [18] Geppert, J. M. (1995). A statistical model for the relationship between futures contract hedging effectiveness and investment horizon length. *Journal of Futures Markets*, 15(5), 507–536. <https://doi.org/10.1002/fut.3990150502>
- [19] Hasan, M. B., Mahi, M., Hassan, M. K., & Bhuiyan, A. B. (2021). Impact of COVID-19 pandemic on stock markets: Conventional vs. Islamic indices using wavelet-based multi-timescales analysis. *The North American Journal of Economics and Finance*, 58, 101504. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2021.101504>

-
- [20] Hasan, M. S., Choudhry, T., & Zhang, Y. (2020). An econometric investigation of hedging performance of stock index futures in Korea: Dynamic versus static hedging. *International Journal of Banking, Accounting and Finance*, 11(2), 227–253. <https://doi.org/10.1504/IJBAAF.2020.106712>
 - [21] Herbst, A. F., Kare, D. D., & Caples, S. C. (1989). Hedging effectiveness and minimum risk hedge ratios in the presence of autocorrelation: Foreign currency futures. *Journal of Futures Markets*, 9(3), 185–197. <https://doi.org/10.1002/fut.3990090302>
 - [22] Hill, J., & Schneeweis, T. (1982). The hedging effectiveness of foreign currency futures. *Journal of Financial Research*, 5(1), 95–104. <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.1982.tb00629.x>
 - [23] Hsu, C.-C., Tseng, C.-P., & Wang, Y.-H. (2008). Dynamic hedging with futures: A copula-based GARCH model. *Journal of Futures Markets*, 28(11), 1095–1116. <https://doi.org/10.1002/fut.20345>
 - [24] Huang, H., & Xiong, T. (2023). A good hedge or safe haven? The hedging ability of China's commodity futures market under extreme market conditions. *Journal of Futures Markets*, 43(7), 968–1035. <https://doi.org/10.1002/fut.22423>
 - [25] Huang, H., & Xiong, T. (2025). Are Chinese live hog futures useful hedging tools? *Applied Economics*, 57(18), 2281–2298. <https://doi.org/10.1080/00036846.2024.2323023>
 - [26] In, F., & Kim, S. (2006a). Multiscale hedge ratio between the Australian stock and futures markets: Evidence from wavelet analysis. *Journal of Multinational Financial Management*, 16(4), 411–423. <https://doi.org/10.1016/j.mulfin.2005.09.002>
 - [27] In, F., & Kim, S. (2006b). The hedge ratio and the empirical relationship between the stock and futures markets: A new approach using wavelet analysis. *The Journal of Business*, 79(2), 799–820. <https://doi.org/10.1086/499138>
 - [28] Juhl, T., Kawaller, I. G., & Koch, P. D. (2012). The effect of the hedge horizon on optimal hedge size and effectiveness when prices are cointegrated. *Journal of Futures Markets*, 32(9), 837–876. <https://doi.org/10.1002/fut.20544>
 - [29] Koenker, R., & Bassett, G., Jr. (1978). Regression quantiles. *Econometrica*, 46(1), 33–50. <https://doi.org/10.2307/1913643>
 - [30] Koenker, R., & Hallock, K. F. (2001). Quantile regression. *Journal of Economic Perspectives*, 15(4), 143–156. <https://doi.org/10.1257/jep.15.4.143>
 - [31] Kotkatvuori-Örnberg, J. (2016). Dynamic conditional copula correlation and optimal hedge ratios with currency futures. *International Review of Financial Analysis*, 47, 60–69. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2016.06.006>
 - [32] Kroner, K. F., & Sultan, J. (1993). Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(4), 535–551. <https://doi.org/10.2307/2331164>
 - [33] Lai, Y., Chen, C. W. S., & Gerlach, R. (2009). Optimal dynamic hedging via copula-threshold-GARCH models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(8), 2609–2624. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.12.010>
 - [34] Lai, Y. S. (2018). Dynamic hedging with futures: A copula-based GARCH model with high-frequency data. *Review of Derivatives Research*, 21(3), 307–329. <https://doi.org/10.1007/s11147-018-9142-1>
 - [35] Lee, H. C., & Chien, C. Y. (2010). Hedging performance and stock market liquidity: Evidence from the Taiwan futures market. *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, 39(3), 396–415. <https://doi.org/10.1111/j.2041-6156.2010.01015.x>

-
- [36] Lien, D., & Shrestha, K. (2007). An empirical analysis of the relationship between hedge ratio and hedging horizon using wavelet analysis. *Journal of Futures Markets*, 27(2), 127–150. <https://doi.org/10.1002/fut.20248>
- [37] Lien, D., Shrestha, K., & Wu, J. (2016). Quantile estimation of optimal hedge ratio. *Journal of Futures Markets*, 36(2), 194–214. <https://doi.org/10.1002/fut.21712>
- [38] Lien, D., Tse, Y. K., & Tsui, A. K. (2002). Evaluating the hedging performance of the constant-correlation GARCH model. *Applied Financial Economics*, 12(11), 791–798. <https://doi.org/10.1080/09603100110046045>
- [39] Lien, D., Wang, Z., & Yu, X. (2021). Optimal quantile hedging under Markov regime switching. *Empirical Economics*, 60(5), 2177–2201. <https://doi.org/10.1007/s00181-020-01831-5>
- [40] Long, T. Q., Nguyen, L. H., & Morgan, P. J. (2024). Dynamic connectedness of financial stress across advanced and emerging economies: Evidence from time and frequency domains. *The Singapore Economic Review*, 69(2), 751–791. <https://doi.org/10.1142/S0217590821410125>
- [41] Malliaris, A. G., & Urrutia, J. L. (1991). The impact of the lengths of estimation periods and hedging horizons on the effectiveness of a hedge: Evidence for foreign currency futures. *Journal of Futures Markets*, 11(3), 271–289. <https://doi.org/10.1002/fut.3990110303>
- [42] Miffre, J. (2004). Conditional OLS minimum variance hedge ratios. *Journal of Futures Markets*, 24(10), 945–964. <https://doi.org/10.1002/fut.20116>
- [43] Moon, G., Yu, W., & Hong, C. (2009). Dynamic hedging performance with the evaluation of multivariate GARCH models: Evidence from KOSTAR index futures. *Applied Economics Letters*, 16(9), 913–919. <https://doi.org/10.1080/17446540802314527>
- [44] Park, T. H., & Switzer, L. N. (1995). Bivariate GARCH estimation of the optimal hedge ratios for stock index futures: A note. *Journal of Futures Markets*, 15(1), 61–67. <https://doi.org/10.1002/fut.3990150106>
- [45] Percival, D. B., & Walden, A. T. (2000). *Wavelet methods for time series analysis*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511841040>
- [46] Shrestha, K., Subramaniam, R., Peranginangin, Y., & Philip, S. S. S. (2018). Quantile hedge ratio for energy markets. *Energy Economics*, 71, 253–272. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2018.02.020>
- [47] Sinaga, M., Mappadang, A., & Nugroho, B. A. (2024). Hedging market risk using gold: A wavelet quintile correlation approach. *AKURASI: Jurnal Riset Akuntansi dan Keuangan*, 6(3), 353–366. <https://doi.org/10.36407/akurasi.v6i3.1459>
- [48] Sultan, J., Alexandridis, A. K., Hasan, M., & Guo, X. (2019). Hedging performance of multiscale hedge ratios. *Journal of Futures Markets*, 39(12), 1613–1632. <https://doi.org/10.1002/fut.22047>
- [49] Swanson, P. E., & Caples, S. C. (1987). Hedging foreign exchange risk using forward foreign exchange markets: An extension. *Journal of International Business Studies*, 18(1), 75–82.
- [50] Xu, Q., Jin, B., & Jiang, C. (2021). Measuring systemic risk of the Chinese banking industry: A wavelet-based quantile regression approach. *The North American Journal of Economics and Finance*, 55, 101354. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2020.101354>
- [51] Xu, Y., & Lien, D. (2020). Optimal futures hedging for energy commodities: An application of the GAS model. *Journal of Futures Markets*, 40(7), 1090–1108. <https://doi.org/10.1002/fut.22118>
- [52] Zainudin, A. D., & Mohamad, A. (2021). Cross hedging with stock index futures. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 82, 128–144. <https://doi.org/10.1016/j.qref.2021.08.005>

- [53] Zhang, D., Hu, M., & Ji, Q. (2020). Financial markets under the global pandemic of COVID-19. *Finance Research Letters*, 36, 101528. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101528>
- [54] Zhou, J. (2016). Hedging performance of REIT index futures: A comparison of alternative hedge ratio estimation methods. *Economic Modelling*, 52, 690–698. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2015.10.009>